Capítulo 1

Introducción

Antonio Alonso-Ayuso, Laureano F. Escudero, María Araceli Garín, María Merino, Juan Francisco Monge, Gloria Pérez, Celeste Pizarro

La toma de decisiones es inherente a la mayoría de los aspectos de las finanzas, la economía, la industria y las actividades sociales. Una de las herramientas que actualmente proporciona decisiones más fiables es la *Optimización*, campo en el que confluyen las Matemáticas y las Ciencias de la Computación. El propósito de ésta es construir y resolver de forma efectiva modelos realistas de la situación que se estudia, con objeto de permitir que los tomadores de decisiones exploren una amplia variedad de posibles alternativas.

Como la realidad es compleja, muchos de estos modelos presentan las siguientes características:

- Son de dimensiones enormes, en términos del número de variables de decisión o del número de condiciones.
- Son estocásticos, es decir, hay parámetros cuyos valores no pueden ser controlados por la persona que toma la decisión y son desconocidos. La incertidumbre puede deberse a

carencia de datos fiables, errores de medida o parámetros que representan información sobre el futuro.

- Son enteros, es decir, intervienen variables enteras.
- Son no lineales, es decir, tanto la función objetivo como alguna de las condiciones son funciones no lineales.

Cada una de las tres últimas características, estocasticidad, integralidad y no linealidad, dificultan enormemente la resolución del problema, considerándose problemas de complejidad computacional elevada, NP-hard.

Los problemas con las características anteriores se transforman en modelos matemáticos de optimización. A menudo son modelos deterministas, en los que aparecen decenas de miles de restricciones, así como de variables continuas, enteras o binarias (enteras 0–1). Con las herramientas actuales de la Investigación Operativa, la optimización de este tipo de modelos no presenta dificultades, al menos, para problemas de tamaño moderado.

Sin embargo, desde mediados del siglo XX (Beale and Dantzing, 1955); se reconoce el hecho de que la optimización determinista tradicional no siempre es la más adecuada para capturar el verdadero comportamiento aleatorio de la mayoría de las aplicaciones de la vida real. La principal razón estriba en que en las aplicaciones están involucrados datos inciertos, que aparecen porque la información necesaria en etapas siguientes aún no está disponible en el momento en que la decisión ha de ser tomada.

Surge así la necesidad de abordar el entorno de incertidumbre que rodea a dichos problemas, y con ella el desarrollo de lo que se conoce como *Optimización bajo incertidumbre*, también llamada *Programación Estocástica*.

La optimización bajo incertidumbre es una disciplina para modelizar problemas de optimización cuyos parámetros no son deterministas. Una característica de los modelos de Optimización bajo incertidumbre es que presuponen conocidas o estimables las distribuciones de probabilidad asociadas a los datos. Además, habitualmente se supone que las distribuciones son discretas con un número finito de estados posibles. El objetivo aquí es encontrar una política de decisión que sea factible para todos (o casi todos) los datos posibles y maximice la esperanza de alguna función sobre las decisiones y las variables aleatorias. Más generalmente, estos modelos se formulan, se resuelven analíticamente o numéricamente, y se analizan de cara a proporcionar información útil al tomador de decisiones.

Los modelos de optimización bajo incertidumbre que han sido más ampliamente estudiados y utilizados son los llamados *problemas lineales de dos etapas*. En estos, el tomador de decisiones lleva a cabo una acción en la primera etapa, después de la cual tiene lugar un experimento aleatorio, afectando el resultado de las decisiones de primera etapa. Entonces, se puede tomar una *decisión con recurso* en la segunda etapa, de forma que compense cualquier efecto negativo que pueda haber ocurrido como consecuencia de las decisiones de primera etapa. Obsérvese que el recurso es la capacidad de tomar una acción correctora después de que haya ocurrido un suceso aleatorio. La política óptima para dicho modelo es una política única para la primera etapa y una colección de decisiones con recurso definidas para la acción a considerar en la segunda etapa, en respuesta a cada posible resultado del experimento.

Como se verá más adelante, las diferencias entre los modelos de programación estocástica y los modelos deterministas clásicos son muy relevantes. En estos modelos la secuencia de decisiones y observaciones es importante. Al construir un problema estocástico, no es suficiente especificar las variables de decisión: el modelador debe construir el problema de forma que prevenga a las decisiones a anticipar los acontecimientos inciertos futuros.

Aunque los problemas estocásticos lineales bietapa se han considerado el paradigma de la modelización en programación estocástica clásica, esta disciplina ha crecido y se ha expandido hasta cubrir una amplio rango de modelos y técnicas de resolución. Las aplicaciones son numerosas, se puede encontrar literatura al respecto en los siguientes campos: finanzas [50, 57, 65, 111, 168, 204, 293, 295], control de producción [11, 13, 14], planificación de capacidad [2, 164, 183, 184, 194], gestión hidráulica [133] , energía [215, 216, 276], agricultura [185], gestión de pesquerías [138, 195], militar [198], silvicultura [232], telecomunicaciones [178, 240, 274] y transporte [9, 10, 173], entre otros muchos.

Una generalización natural de los modelos consiste en extender el **modelo de dos etapas al de varias etapas**. Aquí cada etapa consiste en una decisión seguida por un conjunto de observaciones de los parámetros inciertos que se van desvelando gradualmente con el tiempo. En este contexto, la programación estocástica está muy relacionada con el análisis de decisión, la optimización de simulaciones de acontecimientos discretas, la teoría de control estocástico, los procesos de decisión de Markov, y la programación dinámica.

¿En qué difiere la optimización bajo incertidumbre de estos modelos? En términos generales, esta disciplina combina el poder de la programación matemática con técnicas de probabilidad avanzadas, para atacar los problemas de optimización bajo incertidumbre. Las técnicas de programación matemática tienen importantes beneficios: las herramientas del análisis de convexidad y la teoría de dualidad pueden aplicarse para obtener resultados importantes y desarrollar técnicas de resolución basadas en la descomposición de problemas a gran escala en piezas más manejables. Además, las herramientas de la programación matemática son indispensables para tratar las restricciones generales sobre etapas y variables de decisión. La adición de restricciones es a menudo un serio impedimento en las técnicas de programación dinámica ya que aumenta la dimensión del espacio de etapas, lo que puede convertirlo en un problema intratable. Una restricción actual importante para los problemas de programación estocástica, en contraste con los problemas de programación dinámica, es que se asume que las distribuciones de probabilidad de los parámetros aleatorios vienen dadas, y no dependen de las decisiones que se tomen.

Las técnicas de resolución de modelos de programación estocástica están basadas en los tipos de distribuciones de probabilidad de los parámetros aleatorios. Una posibilidad para tratar la incertidumbre es definir un número de escenarios reducido que represente el futuro. En este caso, es posible calcular la solución del llamado *Modelo Determinista Equivalente*. Estos modelos, son generalmente problemas de enormes dimensiones, así gran parte del esfuerzo en investigación ha sido dedicado a desarrollar algoritmos y explotar la estructura del problema para su resolución, en particular, la descomposición de problemas grandes en componentes más manejables, para lo que las propiedades de convexidad son clave.

Si las distribuciones de probabilidad son continuas, o hay muchas variables aleatorias, el problema se plantea en construir los escenarios apropiados para representar la incertidumbre. Una aproximación construye dos *Modelos Deterministas Equivalentes* diferentes, cuyas soluciones óptimas proveen cotas inferior y superior al valor óptimo del problema original. Una metodología de resolución alternativa, reemplaza las variables aleatorias por una muestra aleatoria finita y resuelve el problema determinista resultante como se haría para el caso de escenarios finitos. A este se le denomina *método de muestra externa*. Bajo ciertas condiciones, se puede obtener una estimación estadística del valor de la solución óptima que converge hacia el óptimo a medida que el tamaño de la muestra crece.

Los modelos de *Optimización bajo Incertidumbre Entera* aparecen cuando se requiere que las variables de decisión tomen valores enteros. Esto puede deberse, entre otras razones, a:

- el carácter entero natural de las variables de decisión;
- la inclusión de decisiones binarias de sí o no, representadas por variables 0–1;
- variables indicador artificiales para restricciones lineales condicionales o, también denominadas, variables semi-continuas. Por ejemplo, las del tipo $m\delta \leq x \leq M\delta$, donde m, M son datos reales, x es una variables real y δ es una variable 0–1. Su interpretación es la siguiente: si $\delta = 0$, entonces $x = 0$ y si, por el contrario, $\delta = 1$, entonces $m \leq x \leq M$;
- satisfacer k de m restricciones, por ejemplo satisfacer restricciones probabilísticas discretas para un porcentaje elevado de realizaciones de la incertidumbre.

En cuanto a la contextualización histórica de la optimización estocástica, se puede decir que apareció en 1955 como una extensión de la programación lineal con énfasis en el gran número de variables y parámetros con trabajos independientes de Beale [24] y Dantzig [69]. Por otro lado, como una extensión de la programación lineal para grandes sistemas con estructuras especiales en la matriz de coeficientes de las restricciones aparecieron las *técnicas de descomposición* [27, 70, 71, 278], también denominadas de *optimización matemática a gran escala*. Aunque las primeras investigaciones aparecen muy temprano, sólo recientemente el avance en la tecnología de los ordenadores ha permitido la solución de problemas de gran tamaño y ha incrementado el interés en el tema de la programación estocástica, produciendo además un avance en la teoría matemática que lo sustenta.

Los libros [39, 151, 189] pueden servir de compendio a la investigación reciente en este campo. Véase una recopilación de bibliografía en optimización estocástica en la página http://mally.eco.rug.nl/biblio/SPlist.html y en optimización estocástica entera en http://mally.eco.rug.nl/biblio/SIP.html.

Internacionalmente, existe una comunidad de investigadores específicamente interesada en optimización estocástica denominada *Stochastic Programming Community* cuya información se difunde en la página http://www.stoprog.org/, la revista electrónica *Stochastic Programming E-Print Series*, http://www.speps.info/, y en conferencias internacionales.

Hay una amplia variedad de problemas de optimización que se enmarcan en un ambiente de incertidumbre. Es por ello que la literatura existente es abundante en ámbitos de decisión financieros, económicos, empresariales, industriales y sociales.

En la siguiente sección se introducen algunos ejemplos seleccionados entre las múltiples aplicaciones existentes, como son la optimización y revisión de carteras, el modelo de bonos, el modelo de gestión de activos y pasivos, la planificación de la producción, la planificación de la expansión de sistemas de generación de energía eléctrica, la planificación hidroeléctrica y el control de fundición.