Problema 2.1

Conceptos que se manejan: Carga volumétrica, principio de superposición

Dificultad: Baja

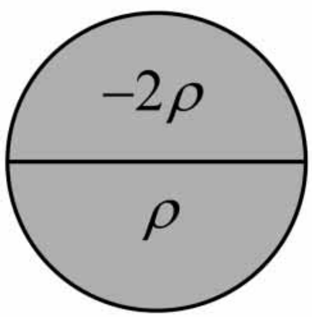

Figura 2.1. Esfera con distribución de carga no simétrica (Problema 2.1)

Una esfera no conductora de radio R está dividida es dos semiesferas. La semiesfera inferior está cargada con una densidad volumétrica uniforme ρ, mientras que la semiesfera superior está cargada con una densidad volumétrica uniforme -2ρ.

Calcular la diferencia de potencial entre el centro de la esfera y el infinito.

Solución

Al tratarse de una distribución finita, la referencia de potencial cero puede tomarse en el infinito. El potencial en el centro de la esfera *O* se calcula superponiendo los creados por la semiesfera de arriba y la de abajo:

Potencial en *O* creado por la semiesfera inferior (se utiliza como elemento diferencial de volumen una película semiesférica de radio *r* y espesor *dr*):

$$dV_{O1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\frac{4\pi r^2}{2}dr}{r} = \frac{\rho r \cdot dr}{2\varepsilon_0} \rightarrow V_{O1} = \int_{r=0}^{r=R}\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

Utilizando el resultado anterior, el potencial en el centro creado por la semiesfera superior:

$$V_{O2} = \frac{(-2\rho)R^2}{4\varepsilon_0}$$

El potencial total en *O* por superposición:

$$V_O = V_{O1} + V_{O2} = \frac{-\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

Problema 2.2

Conceptos que se manejan: Ley de Coulomb

Dificultad: Baja

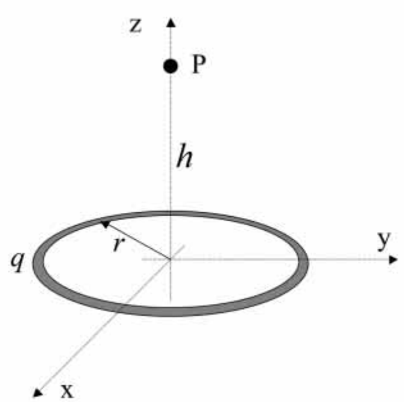

Figura 2.2. Anillo del Problema 2.2

Calcular el campo electrostático creado por un anillo circular de radio r y carga total q repartida uniformemente, en un punto del eje situado a una distancia h.

Solución

El campo creado en el punto P por un elemento de carga dq situado a un ángulo θ se calcula como:

$$d\vec{E} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}_{dq}\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_{dq}\right) \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\left(h\vec{k}-r\cos\theta\,\vec{i}-r\,sen\theta\,\vec{j}\right)$$

Por simetría, las componentes en x y en y se anulan, quedando sólo la componente en z.

Integrando a lo largo de todo el anillo y se obtiene:

$$\vec{E}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{h\lambda r.dl}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\vec{k}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{h\cdot 2\pi R\lambda}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\vec{k}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\cdot q}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\vec{k} \qquad (2\text{-}1)$$

Problema 2.3

Conceptos que se manejan: Principio de superposición

Dificultad: Baja

Dos anillos coaxiales de grosor despreciable y radio R se encuentran separados una distancia H. Cada anillo posee una carga Q uniformemente distribuida. Una carga q se encuentra situada sobre el eje de los anillos, equidistante de ambos. Calcular el trabajo que hay que realizar para alejar infinitamente dicha carga siguiendo un camino rectilíneo perpendicular al eje.

Solución

El campo electrostático es un campo conservativo, luego el camino que se siga entre dos puntos no influye en el trabajo necesario para ello. Se calcula el trabajo en función de la diferencia de potencial como:

$$W_{P\infty}=qV_{\infty P}=q(V_\infty-V_P)=-qV_P$$

Se obtiene por tanto el potencial en el punto indicado. Por superposición y simetría dicho potencial será el doble del creado por uno de los anillos:

$$V_P = 2V_{anillo}$$

El potencial creado por un anillo en un punto de su eje a una distancia *H/2* del centro es:

$$V_{anillo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + \left(H/2\right)^2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{4R^2 + H^2}}$$

El resultado final es:

$$W_{P\infty} = \frac{-qQ}{\pi\varepsilon_0\sqrt{4R^2 + H^2}}$$

Problema 2.4

Conceptos que se manejan: Ley de Coulomb, potencial eléctrico

Dificultad: Baja

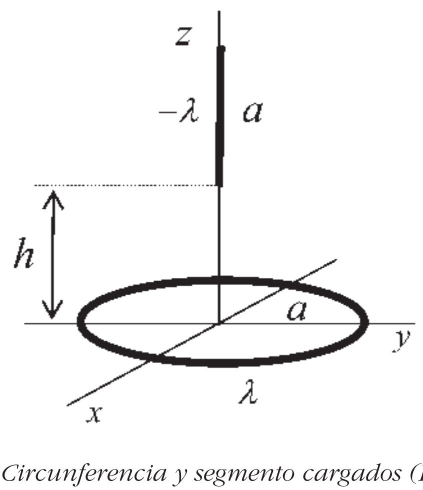

Figura 2.3. Circunferencia y segmento cargados (Problema 2.4)

Se tiene un hilo con forma de circunferencia de radio *a* y centrada en el origen, cargado con densidad lineal de carga λ. Sobre el eje OZ se ha dispuesto un hilo recto de longitud *a*, cargado con densidad lineal de carga -λ, cuyo extremo inferior dista una distancia *h* del origen de coordenadas.

Calcular el valor de *h* para que no exista diferencia de potencial entre el centro de la circunferencia y el infinito.

Solución:

Aplicando el principio de superposición, hay que determinar el valor de h para el que el potencial creado por el anillo en su centro sea igual y de signo contrario que el creado por el hilo a una distancia h de su extremo. Así:

$$dV_{anillo} - k\,dq/r$$

Como r=a (constante), el potencial en el origen es simplemente

$$V = 2k\pi\lambda$$

Asimismo, se calcula el potencial creado por el hilo. Para ello:

$$dV_{hilo} = -k\lambda dz / z$$

por lo que integrando entre h y $a+h$ y se obtiene:

$$V_{hilo} = -k\lambda \ln(1 + \frac{a}{h})$$

Por tanto, el valor de h para el que $V_{anillo} = -V_{hilo}$ es

$$h = \frac{a}{e^{2\pi} - 1}$$

Problema 2.5

Conceptos que se manejan: Carga superficial, integración de campo

Dificultad: Media-baja

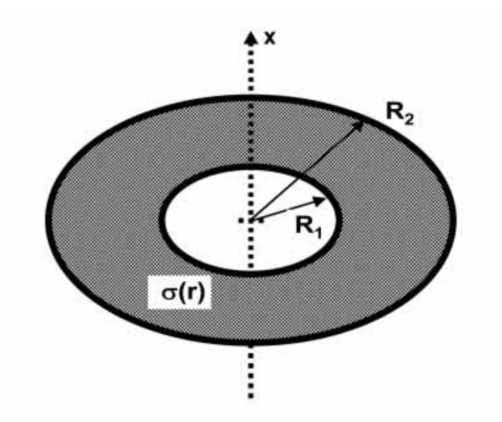

Figura 2.4. Corona circular con densidad superficial de carga variable (Problema 2.5)