2

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia es la forma básica de describir modelos de sistemas lineales que se emplea en este curso. Basada en la transformación de Laplace, de la que se presentará un breve repaso, permite obtener la respuesta temporal, la respuesta estática y la respuesta en frecuencia. El análisis de distintas descomposiciones de la respuesta temporal permite adquirir útiles ideas cualitativas, y definir varios importantes conceptos: efectos de las condiciones iniciales, respuestas libre y forzada, regímenes permanente y transitorio. También permite definir el concepto central de estabilidad, y establecer un primer criterio para su investigación.

2.1 La transformación de Laplace

La utilidad esencial de la transformación de Laplace reside en su propiedad de convertir ecuaciones diferenciales lineales (en la variable tiempo t) en ecuaciones algebraicas (en la variable compleja s). Se resumen a continuación los conceptos y propiedades más importantes para el objeto de este libro, usando una variante especial de transformación de Laplace que permite tratar funciones del tiempo discontinuas en el origen e impulsos; ver **Lathi**.

2.1.1. Funciones básicas y definiciones

Funciones $x(t)$ del tiempo son denominadas frecuentemente <u>señales</u>. Una muy empleada es el <u>escalón unitario</u> $u_0(t)$:

$$u_0(t) = 0 \text{ para } t < 0$$
$$u_0(t) = 1 \text{ para } t > 0$$

Una señal es causal si $x(t) = 0$ para $t < 0$; para convertir cualquier señal en causal basta multiplicarla por $u_0(t)$.

La condición inicial es $x(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x(t)$; la de $u_0(t)$ es 0

El valor inicial es $x(0^+) = \lim_{x\to 0^+} x(t)$; el de $u_0(t)$ es 1

La transformada de Laplace de $x(t)$ es $X(s)$:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

La idea esencial del análisis de Fourier, del que el de Laplace es una variante, es descomponer funciones en exponenciales. Las funciones constantes son exponenciales de exponente 0; las funciones senoidales se descomponen en exponenciales imaginarias. La transformada de la función exponencial es fácil de obtener aplicando la integral de definición:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

No toda señal $x(t)$ tiene transformada, pues la integral no converge en algunos casos; pero esto no preocupa con las señales que se usarán. Nótese que la transformada de una función no causal, y la de la misma función multiplicada por $u_0(t)$ coinciden; pero hay una importante distinción entre ambas que afecta a las propiedades de la derivación. La distinción entre 0^- y 0^+ obedece a la necesidad de tratar funciones discontinuas en el origen como los escalones, y también los impulsos, que tienen integral no nula entre 0^- y 0^+

La *Tabla 2.1* es una tabla abreviada de transformadas. Véase una más amplia en el apéndice **A**.

2.1.2 Propiedades

Se indican aquí las propiedades que se usan en el curso, sin pretender dar una lista completa.

Linealidad $\quad \mathcal{L}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$

Se demuestra a partir de la linealidad de la integral de definición.

Tabla 2.1 Funciones básicas. Transformadas de Laplace

Señal	$x(t)$	$X(s)$
Impulso	$\delta(t)$	1
Escalón	$u_0(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Seno	$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Exponencial. Coseno	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Derivación $\quad L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$

Puede demostrarse integrando por partes $\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\,\mathrm{d}t$

Importante: Si $x(t)$ es causal, la derivación en el tiempo se reduce a multiplicar por s en Laplace.

Puede definirse a partir de aquí el impulso $\delta(t)$ como la derivada del escalón unitario, y obtener su transformada, = 1. Esta extraña función (la derivada del escalón no existe en el origen; el impulso debería analizarse mediante la teoría de distribuciones) es, sin embargo, la señal básica, por tener transformada unidad. Debe cumplir:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Puede aproximarse por una señal grande y de corta duración cerca del origen de tiempo, con integral = 1.

Integración $$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} x(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

Esta propiedad es inversa de la anterior.

Valor inicial $$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Valor final $$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

si todos los polos de $sX(s)$ tienen la parte real estrictamente negativa.

Retardo $$\mathcal{L}\{x(t-\rho)\} = e^{-\rho s}X(s)$$

si $x(t)$ es causal

Convolución $$\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)X_2(s)\} = \int_{0^-}^{t} x_1(t-r)x_2(r)\,\mathrm{d}r$$

Nótese bien que la transformada del producto de dos funciones del tiempo no es, en general, el producto de transformadas. De la misma forma, la transformada inversa del producto es una operación más complicada, denominada convolución.

2.2 Ecuación diferencial y función de transferencia

El modelo básico de un sistema describe matemáticamente la influencia de una señal de entrada $u(t)$ sobre otra señal de salida $y(t)$. Supóngase que ambas están relacionadas mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, de orden n.

$$a_0 y(t) + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = b_0 u(t) + b_1\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_m\frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m}$$

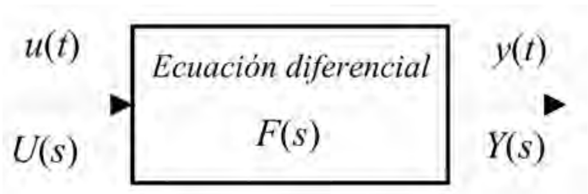


Figura 2.1 Diagrama de bloques básico

Es importante observar que físicamente la salida depende de la entrada, pero normalmente no al contrario. Esta orientación no queda bien reflejada en la ecuación diferencial, aunque se hace explícita en los diagramas de bloques.

Se transforman ahora ambos miembros de la ecuación. Si ambas señales son causales (y por tanto tienen condiciones iniciales nulas), cada derivada se traduce simplemente en un producto por s, y la ecuación diferencial en t se convierte en una ecuación algebraica en s:

Definiendo los polinomios: $A(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \qquad B(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i$

$$Y(s) \cdot A(s) = U(s) \cdot B(s)$$

La salida puede expresarse (en transformadas) como la entrada multiplicada por la función de transferencia $F(s)$ del sistema, expresada como cociente de polinomios:

$$Y(s) = U(s) \cdot F(s) \qquad\qquad F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Los sistemas de orden no mínimo tienen raíces comunes a $B(s)$ y $A(s)$; la función de transferencia *debe escribirse de forma simplificada*, y es de orden inferior a n.
- Las funciones de transferencia propias tienen numerador de orden menor o igual al del denominador; esto siempre sucede en sistemas físicos, y se supondrá implícitamente.
- Las raíces del denominador y del numerador se denominan, respectivamente, polos y ceros de $F(s)$.

Conviene recordar que el concepto de función de transferencia *es aplicable exclusivamente a sistemas lineales e invariantes en el tiempo*, aunque existen algunas extensiones de aplicación limitada.

Funciones de transferencia trascendentes

Algunos sistemas no se representan mediante una ecuación diferencial ordinaria, pero son pese a ello lineales, y tienen función de transferencia; por ejemplo los descritos por ecuaciones lineales en derivadas parciales. Resultan entonces funciones de transferencia trascendentes, con un número infinito de polos. Un ejemplo más sencillo que aparece frecuentemente lo proporcionan las señales relacionadas por retardos en el tiempo. Véase el apéndice **B**.

$$y(t) = u(t - \rho) \qquad\qquad F(s) = e^{-\rho s}$$

Respuesta impulsional

Respuesta es un nombre habitual para *y(t)*. En el caso particular:

$u(t) = \delta(t) \quad U(s) = 1$ $$y(t) = f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Obtención de la respuesta por convolución

La respuesta puede obtenerse realizando la operación convolución entre la entrada y la respuesta impulsional:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)F(s)\} = \int_{0^-}^{t} u(t-r)f(r)\,\mathrm{d}r$$

2.3 Transformación inversa de funciones racionales

Se puede recurrir a tablas de transformación de Laplace para obtener la transformación inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. En la práctica, se usan frecuentemente soluciones numéricas de integración de ecuaciones diferenciales.

En este apartado se desarrolla un procedimiento que permite algo mucho más importante que la simple obtención de la transformación inversa: el análisis cualitativo y cuantitativo de las formas que puede tomar la respuesta de un sistema. Este procedimiento consiste en descomponer $Y(s)$ en suma de funciones simples, cuya transformada inversa es bien conocida. En esencia:

$$\text{Si } Y(s) = \sum \frac{R_i}{s - p_i} \qquad \text{entonces } y(t) = \sum R_i e^{p_i t}$$

$$\text{con } R_i = \left[Y(s)(s - p_i)\right]_{s = p_i}$$

Teniendo en cuenta que los polos *pi* y los residuos *Ri* pueden ser complejos en general, solamente quedan fuera de esta idea esencial los polos múltiples.

2.3.1 Desarrollo en fracciones parciales

Se supondrá que $Y(s)$ es una función racional (cociente de polinomios), y que el orden del numerador es inferior al del denominador (en el caso poco habitual de que esto no sea así, la respuesta contendrá impulsos, e incluso derivadas de impulsos).

Se requiere en primer lugar obtener los polos p_i de $Y(s)$, es decir, las raíces del denominador.

Polos simples. Método fundamental

Si todos los polos son distintos, sean reales o complejos, se obtienen los residuos R_i:

$$Y(s) = \sum \frac{R_i}{s - p_i} \qquad\qquad R_i = \left[Y(s)(s - p_i)\right]_{s=p_i}$$

La demostración de la fórmula de los residuos es trivial; el producto por $(s - p_i)$ equivale en realidad a eliminar este término del denominador de $Y(s)$. Nótese que, a diferencia de otros procedimientos, éste implica únicamente una sustitución directa de s por p_i, sin necesidad de resolver sistemas de ecuaciones.

Polos múltiples

Si existen polos iguales, la parte del desarrollo correspondiente a los polos simples puede hacerse como se ha indicado anteriormente, pero un polo múltiple (de multiplicidad m) da lugar a sumandos de la forma:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{(s - p_i)^j} \qquad\qquad r_j = \frac{1}{(m-j)!}\left[\frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}}\left(Y(s)(s - p_i)^m\right)\right]_{s=p_i}$$

Nótese que r_m se obtiene sin necesidad de derivar, de forma similar a la de los polos simples. Las derivadas son incómodas e importantes fuentes de errores, por lo que en muchos casos es recomendable usar otros métodos.

Agrupación del par complejo

Si todos los coeficientes de $Y(s)$ son reales, los polos complejos vendrán en pares conjugados, $p = -a \pm bj$, y de la misma forma los residuos correspondientes. Pueden evitarse los números complejos mediante la siguiente agrupación (* denota el conjugado complejo):

$$\frac{R}{s+a-bj}+\frac{R^*}{s+a+bj}=\frac{r_1 s+r_2}{(s+a)^2+b^2} \qquad 2R=r_1+\frac{r_1 a-r_2}{b}j$$

Otros métodos

Pueden también obtenerse términos del desarrollo planteando sistemas de ecuaciones. Nótese que parte de los términos pueden obtenerse mediante el método de sustitución antes indicado, y reservar los sistemas de ecuaciones para los términos más difíciles (derivadas en los polos múltiples, o si no se desea trabajar con complejos). En el *Ejemplo 2.1* se indicarán dos formas de plantear sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 2.1 En este ejemplo se da la transformada $Y(s)$, con el denominador ya factorizado:

$$Y(s)=\frac{80}{s(s+1)^2(s+1-2j)(s+1+2j)}$$
$$=\frac{R_0}{s}+\frac{r_1}{s+1}+\frac{r_2}{(s+1)^2}+\frac{R}{s+1-2j}+\frac{R^*}{s+1+2j}$$

Empleando la fórmula de los residuos:

$$R_0=\frac{80}{(0+1)^2(0+1-2j)(0+1+2j)}=16$$

$$r_2=\frac{80}{-1(-1+1-2j)(-1+1+2j)}=-20$$

$$R=\frac{80}{(-1+2j)(-1+2j+1)^2(-1+2j+1+2j)}=2-j$$

Puede obtenerse r_1 sin necesidad de derivar, teniendo en cuenta que la expresión desarrollada debe igualar a la original para cualquier valor de s. Tomando s = 1, valor sencillo y distinto de cualquier polo:

$$Y(1)=\frac{80}{1(1+1)^2(1+1-2j)(1+1+2j)}$$
$$=\frac{R_0}{1}+\frac{r_1}{1+1}+\frac{r_2}{(1+1)^2}+\frac{R}{1+1-2j}+\frac{R^*}{1+1+2j}$$

Dando otros valores a s, puede obtenerse un sistema con el número necesario de ecuaciones; como ya se han calculado los otros residuos, basta con una sola ecuación, cuyo resultado es: $r_1 = -20$

Otro procedimiento para obtener un sistema de ecuaciones consiste en manipulaciones algebraicas para obtener el numerador en función de los residuos, igualando después los términos de igual orden. Aunque este procedimiento es el más conocido, dista frecuentemente de ser el más cómodo, tanto para cálculo manual como automático. Si se emplea la agrupación del par complejo:

$$80 = R_0 (s + 1)^2 \left[(s + 1)^2 + 2^2\right] + r_1 s(s + 1) \left[(s + 1)^2 + 2^2\right] + r_2 s \left[(s + 1)^2 + 2^2\right] +$$
$$+ (r_3 s + r_4)\, s\, (s + 1)^2$$

§

2.3.2 Transformaciones inversas básicas

Un polo real $s = -a$ da lugar a una exponencial de <u>constante de tiempo</u> $\tau = 1/a$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{s+a}\right\} = Re^{-at} = Re^{-t/\tau}$$

Un par complejo $s = -a \pm bj$ da lugar a una exponencial de constante de tiempo $1/a$, multiplicada por una senoidal de pulsación b. Es decir, la parte real del polo determina la exponencial, y la parte imaginaria, la senoidal.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{s+a-bj} + \frac{R^*}{s+a+bj}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r_1 s + r_2}{(s+a)^2 + b^2}\right\} = Ae^{-at}\cos(bt + \varphi)$$

La amplitud y la fase de la respuesta vienen determinadas por el residuo:

$$Ae^{j\varphi} = 2R = r_1 + \frac{r_1 a - r_2}{b}\, j$$

Los polos múltiples dan lugar a términos semejantes a los correspondientes a polos simples, multiplicados por potencias del tiempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r_j}{(s-p)^j}\right\}=\frac{r_j}{(j-1)!}t^{j-1}e^{pt}$$

Esta expresión también es válida para cada polo complejo, aunque no se presenta aquí su desarrollo.

2.3.3 Los polos y las formas de respuesta

Puede deducirse del desarrollo anterior que los polos de $Y(s)$ definen las funciones temporales presentes en $y(t)$; los residuos son importantes solamente como cuantificadores, determinando amplitudes y fases. A cada polo corresponde entonces un término de la respuesta con las características cualitativas que se indicarán a continuación. Ver cuidadosamente la *Figura 2.2*; la disposición de los cuadros imita la situación de los polos en el plano complejo.

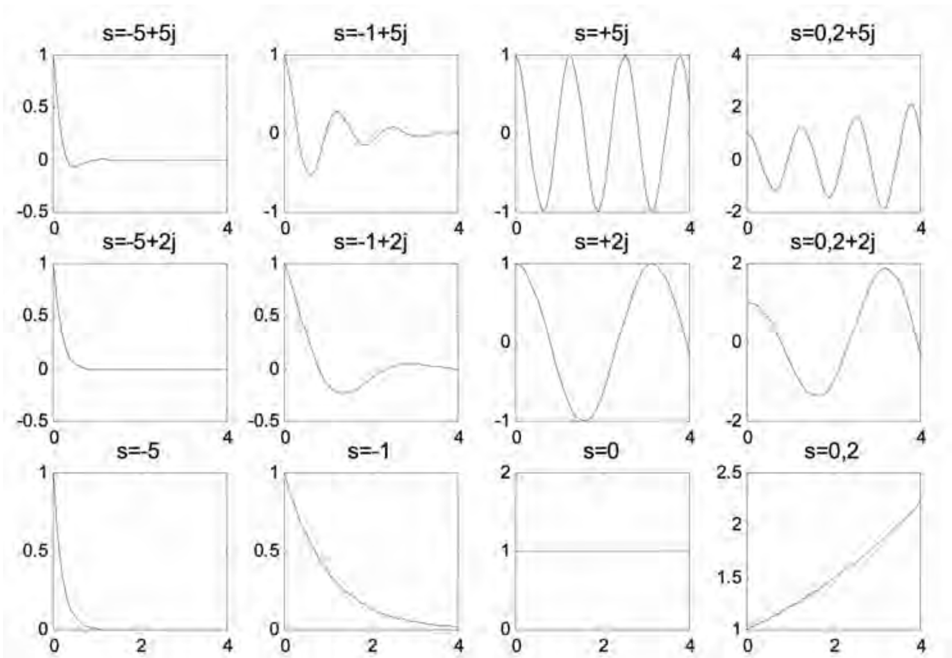


FIGURA 2.2 Polos en el plano complejo, y formas de respuesta correspondientes

Convergencia

- Polos con *parte real negativa* dan lugar a términos decrecientes en el tiempo, que tienden a desaparecer. Esto se último se verifica también en los polos múltiples: aunque aparece un producto por potencias del tiempo, siempre la exponencial es más fuerte.
- Polos con *parte real positiva* dan lugar a términos crecientes en el tiempo.
- Polos *simples con parte real nula* dan lugar a términos que ni crecen en el tiempo ni desaparecen (constante si el polo es nulo, oscilación si son polos imaginarios).
- Polos *múltiples con parte real nula*: el producto por potencia del tiempo da lugar a un término creciente.

Rapidez

- Cuanto más negativa sea la parte real, más rápidamente decrece la exponencial.
- Cuanto más grande sea la parte imaginaria, mayor es la frecuencia de las oscilaciones.

Amortiguamiento

- Si los polos son complejos con parte real negativa, un cociente pequeño *a/b* de los valores absolutos de la parte real y la imaginaria indica que serán aparentes varias oscilaciones antes de que la exponencial las anule. Se habla entonces de polos poco amortiguados.
  amortiguamiento $\zeta = \text{sen}[\text{arctg}(a/b)]$ (ver **4.2.1**)

Obténgase el cociente y el amortiguamiento en los distintos casos de la *Figura 2.2*

2.4 Respuesta temporal

Se llama respuesta temporal de un sistema simplemente a su salida *y(t)*, para una entrada determinada *u(t)*. Si no se indica otra cosa, se entiende que las condiciones iniciales son nulas, pero no siempre es así.

Para incluir la respuesta debida a las condiciones iniciales, hay que volver a la ecuación diferencial del sistema:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m}$$

Considérese que la entrada es causal, pero existen condiciones iniciales en la salida y sus derivadas: $y(0^-)$, $y'(0^-)$, $y''(0^-)$..., que aparecen al transformar, formando un polinomio adicional:

$$Y(s) \cdot A(s) - C(s) = U(s) \cdot B(s)$$

$$C(s) = a_1 y(0^-) + a_2 \left[y(0^-)s + y'(0^-)\right] + a_3 \left[y(0^-)s^2 + y'(0^-)s + y''(0^-)\right] + \dots$$

$$Y(s) = U(s) \cdot F(s) + \frac{C(s)}{A(s)}$$

Nótese que si el sistema es de orden mínimo, el denominador de $F(s)$ es precisamente $A(s)$. En este caso, aunque la definición de función de transferencia implica condiciones iniciales nulas, puede deducirse sencillamente la ecuación diferencial, obteniendo así el efecto de las condiciones iniciales.

Tres formas distintas de repartir los términos de la respuesta temporal

1) Los polos de $Y(s)$ son, o bien polos de $U(s)$, o bien raíces del polinomio característico $A(s)$. Los primeros dan lugar a términos de la forma de la entrada, y los segundos a términos introducidos por el sistema, con formas características del mismo.

$$y(t) = y_u(t) + y_a(t)$$

Cabe la posibilidad de coincidencias, que producen consecuencias interesantes:

- ○ Si coinciden polos de $U(s)$ y de $F(s)$, aparecen polos múltiples, y por tanto productos por potencias del tiempo.
- ○ Si coinciden ceros de $U(s)$ y polos de $F(s)$, o bien raíces de $C(s)$ y de $A(s)$, los residuos correspondientes son nulos: esa entrada particular o esas condiciones iniciales no excitan la respuesta correspondiente a esos polos.
- ○ Los *filtros supresores* se basan en el efecto simétrico: diseñar $F(s)$ con ceros coincidentes con los polos correspondientes a la respuesta que se desea eliminar. Por ejemplo, para eliminar los 50 Hz, $F(s)$ tendrá ceros en $\pm 100\pi j$.

2) La <u>respuesta forzada</u> es la debida a la entrada, para condiciones iniciales nulas. La <u>respuesta libre</u> es la debida a las condiciones iniciales, para entrada nula; como es obvio, se compone exclusivamente de términos del sistema $y_a(t)$

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t)$$

Si el sistema es de orden mínimo:

- ○ Las condiciones iniciales no introducen nuevos polos en $Y(s)$, ni por tanto nuevos términos en $y(t)$. Únicamente modifican los residuos.
- ○ Los polos de $F(s)$ indican las formas de la respuesta libre.

3) Parte de los términos, correspondientes a polos con parte real negativa, desaparecen con el tiempo, formando el régimen transitorio; los que no desaparecen forman el régimen permanente. Nótese bien, porque la confusión es frecuente, que estos conceptos describen *funciones del tiempo, y no valores de ninguna clase*. También es frecuente llamar respuesta transitoria a toda la respuesta temporal, aunque es una práctica incorrecta.

$$y(t) = y_P(t) + y_T(t)$$

2.5 Estabilidad

La estabilidad es quizá el tema más importante de la teoría de control. Aquí se establecen dos definiciones básicas, ligadas a las propiedades que tiene siempre un sistema estable, y un primer criterio para determinar si un sistema es estable. A lo largo del curso se verán otros criterios de estabilidad de mayor utilidad en el diseño de sistemas de control; se dedica a este tema el capítulo **6**.

Estabilidad BIBO (respuesta forzada)

Un sistema es estable BIBO si, para cualquier entrada acotada (*Bounded Input*), la salida está acotada (*Bounded Output*).

Nótese que la estabilidad BIBO es una propiedad del sistema, y no de las entradas o de las salidas. Un sistema estable puede dar salidas no acotadas (si las entradas no lo están), y un sistema inestable puede dar salidas acotadas (para entradas particulares que no exciten las respuestas no acotadas).

Estabilidad asintótica (respuesta libre)

Un sistema es asintóticamente estable si la respuesta libre tiende a anularse con el tiempo, para cualesquiera condiciones iniciales.

Igualmente la estabilidad asintótica es una propiedad del sistema, y no de las condiciones iniciales o de la respuesta libre.

Un criterio de estabilidad

Un sistema es estable BIBO si, y sólo si, todos los polos de $F(s)$ tienen la parte real estrictamente negativa (están en el semiplano izquierdo). En efecto, cualquier entrada acotada da lugar a polos de $U(s)$ con parte real negativa, o polos simples con parte real nula. Si $F(s)$ tiene polos con parte real negativa, todos los términos de la respuesta estarán acotados.

Si $F(s)$ tiene algún polo con parte real nula, una entrada con ese mismo polo da lugar a respuestas no acotadas. Estos sistemas no son por tanto estables, aunque en la práctica se los trata frecuentemente como un caso fronterizo entre la estabilidad y la inestabilidad.

Un sistema es asintóticamente estable si, y sólo si, todas las raíces de $A(s)$ tienen la parte real estrictamente negativa.

En sistemas de orden mínimo coinciden ambas estabilidades; en principio, se dará por supuesto este caso habitual. Sin embargo, las dos estabilidades indican propiedades distintas, cada una muy importante.

Propiedades de los términos de la respuesta de los sistemas estables

- Todos los términos del sistema pertenecen al régimen transitorio.
- El régimen permanente es independiente de las condiciones iniciales. Esta propiedad es especialmente importante: obsérvese que, al estudiar el régimen permanente de un circuito, en continua o en alterna, no se habla de las condiciones en que estaba en el momento de conectar; ello supone la estabilidad de dicho sistema.
- En el régimen permanente están exclusivamente los términos de la forma de la entrada que no corresponden a polos con parte real negativa. Los residuos, aunque no dependen de las condiciones iniciales, dependen, sin embargo, de $F(s)$ (si hay coincidencias, podrían ser nulos).
- Dos casos especialmente importantes son las entradas constantes, a las que corresponde un régimen permanente constante (o estático), y las entradas senoidales, a las que corresponde un régimen permanente senoidal de la misma frecuencia. A estos casos se refiere el próximo apartado.

2.6 Ganancia estática y respuesta en frecuencia

Considérese la salida en régimen permanente de un sistema estable, para entradas constantes o senoidales.

Ganancia estática F(0)

Para una entrada constante $u(t) = 1$ $\qquad$ $y_P(t) = F(0)$

Para entradas no unitarias, la salida es igual a la entrada multiplicada por F(0), por el principio de linealidad; de aquí el nombre de ganancia.

Respuesta en frecuencia F (jω)

Para una entrada senoidal $u(t) = \cos(\omega t)$ $\qquad$ $y_P(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$Ae^{j\varphi} = F(j\omega)$$

Nótese que se define la fase φ en adelanto, al contrario del convenio usual en electrotecnia; frecuentemente será negativo, indicando que la salida va retrasada con respecto a la entrada. Para otras entradas senoidales, A representa la ganancia a la pulsación ω, y φ el desfase (en adelanto).

Ambas propiedades son fáciles de relacionar con la obtención de los residuos correspondientes a los polos de la entrada (0 en el primer caso, $\pm j\omega$ en el segundo). Si el sistema no es estable, estas expresiones también suelen aplicarse, ya que definen el término correspondiente del régimen permanente, aunque puede haber otros términos en el mismo.

Ejemplo 2.2 Se estudiarán distintas respuestas del sistema:

$$F(s) = \frac{80}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 12s + 5}$$

$$F(s) = \frac{80}{(s+1)^2(s^2+2s+5)} = \frac{80}{(s+1)^2(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

<u>Los polos</u> son -1 (doble) y $-1 \pm 2j$ (par complejo); todos tienen la parte real estrictamente negativa, luego el sistema es <u>estable</u>. Las formas de las respuestas características del sistema son e^{-t}, te^{-t}, $e^{-t}\cos(2t)$.

<u>La respuesta a un escalón</u>, para condiciones iniciales nulas (respuesta forzada) puede obtenerse a partir de $Y(s) = \frac{1}{s}F(s)$

El valor inicial es $\qquad y(0^+) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

El valor final es $\qquad y(\infty) = \lim_{s\to 0} F(s) = 16$

El valor final coincide con el régimen permanente de la salida y con la ganancia estática $F(0) = 16$

Los residuos de $Y(s)$ se han obtenido en el *Ejemplo 2.1*; la respuesta incluye un término constante de la forma de la entrada, y los términos característicos del sistema. Como el sistema es estable, éstos pertenecen al régimen transitorio.

$$y_F(t) = 16 - 20e^{-t} - 20te^{-t} + 2\sqrt{5}e^{-t}\cos(2t - \mathrm{arctg}\frac{1}{2})$$

Respuesta libre, suponiendo que el sistema es de orden mínimo, debida a las siguientes condiciones iniciales:

$y(0^-) = 5$, $y'(0^-) = -10$, $y''(0^-) = 15$, $y'''(0^-) = -20$; a partir del polinomio característico $A(s)$:

$$C(s) = 12[5] + 10[5s - 10] + 4[5s^2 - 10s + 15] + [5s^3 - 10s^2 + 15s - 20]$$

$$Y_L(s) = \frac{C(s)}{A(s)} = \frac{5s^3 + 10s^2 + 25s}{(s+1)^2(s^2 + 2s + 5)}$$

Obteniendo los residuos como se ha explicado en **2.3.1** se obtiene:

$$y_L(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t}$$

La respuesta contiene exclusivamente formas características del sistema; el residuo correspondiente al par complejo resulta nulo para estas particulares condiciones iniciales, que no excitan la respuesta correspondiente: hay raíces comunes en $C(s)$ y $A(s)$. Como el sistema es estable, toda la respuesta libre pertenece al régimen transitorio. Nótese que la respuesta libre puede añadirse a cualquier respuesta forzada.

Respuesta en frecuencia:

$$F(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+1)^2(-\omega^2 + 2j\omega + 5)} = \frac{80}{(j\omega+1)^2(j\omega + 1 - 2j)(j\omega + 1 + 2j)}$$

Si se dispone de la forma factorizada es conveniente usarla, en vez de los polinomios.

Para $\omega = 1$ $\qquad F(j\omega) = -4 - 8j = 8{,}94e^{-2{,}03j}$

Para una entrada senoidal $u(t) = 5\cos(t + 0{,}5)$

$$y_P(t) = 5 \cdot 8{,}94\cos(t + 0{,}5 - 2{,}03)$$

§

2.7 Diagramas de bloques

En muchos sistemas de control, la (posiblemente) complicada relación entre salida y entrada puede deducirse a partir de varias relaciones sencillas entre variables intermedias; es decir, el sistema puede descomponerse en varios sistemas interconectados o, lo que es lo mismo, el planteamiento inicial conduce a un sistema de ecuaciones relacionadas, y no a una ecuación única.

El diagrama de bloques es una técnica gráfica de representación de ecuaciones matemáticas, que permite una comprensión más intuitiva de las relaciones entre las ecuaciones. También permite la simplificación (eliminación de variables intermedias) de las mismas, mediante las técnicas del *álgebra de diagrama de bloques*.

Debe insistirse en el hecho de que el diagrama de bloques tiene una correspondencia estricta con las ecuaciones matemáticas, aunque, si se dibuja hábilmente, tiene una cierta correspondencia (normalmente no estricta) con la configuración física del sistema. En la *Figura 2.3* se define la correspondencia matemática de los tres elementos presentes en un sistema lineal: líneas = variables, círculos = puntos de suma de variables (o resta, si se indica explícitamente), rectángulos = funciones de transferencia.

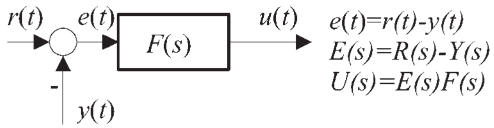


Figura 2.3 Elementos de un diagrama de bloques lineal

Otros diagramas

Los convenios de los diagramas pueden diferir según las escuelas, aunque son normalmente comprensibles.

— Aunque es ocioso, muchos autores marcan con un aspa “X” los puntos de suma, o ponen explícitamente también los signos +.
— En las publicaciones alemanas, es frecuente indicar las funciones de transferencia elementales mediante un gráfico de su respuesta a un escalón.
— En sistemas no lineales, pueden encontrarse puntos de producto de variables; se indican con la letra $\prod$ o un símbolo “X” (posible confusión) y las sumas con la letra Σ. Las relaciones no lineales entre variables se describen como se pueda (si es una relación estática, suele

indicarse con un gráfico de la función); es útil diferenciar de alguna forma los bloques no lineales (por ejemplo, con un doble rectángulo o un rectángulo redondeado).

— Ver en el apéndice **C** un diagrama generado con SIMULINK, con convenios algo distintos (y además van evolucionando).

Diagramas de flujo

Es una técnica equivalente, preferible por su mayor sencillez cuando hay que trazar diagramas complicados. Los elementos se reducen a dos: círculos = variables y puntos de suma simultáneamente; líneas = funciones de transferencia; son = 1 si no se indica nada. La *Figura 2.4* corresponde a la *Figura 2.3*.

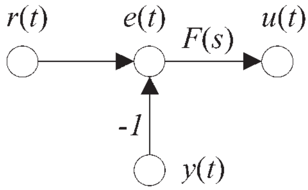


FIGURA 2.4 Elementos de un diagrama de flujo

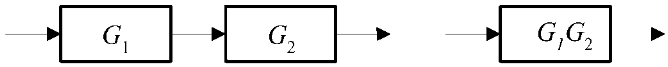
Álgebra de diagramas de bloques

En la *Figura 2.5* se representan algunas de las relaciones más útiles, que aplicadas sucesivamente permiten simplificar, si se desea, diagramas relativamente complejos, aunque no todos. La demostración consiste sencillamente en simplificar las ecuaciones matemáticas correspondientes.

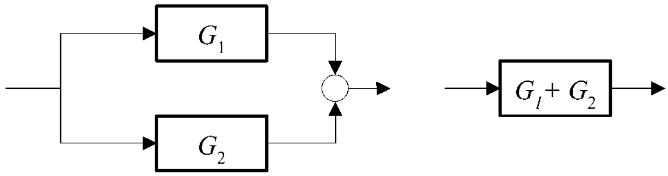
La equivalencia serie indicada suministra una ilustración de la importante idea de que los diagramas de bloques representan ecuaciones matemáticas, y no físicas. En efecto, es bien sabido que al añadir un amplificador en serie con otro la ganancia en vacío del conjunto no es necesariamente el producto de ganancias en vacío, sino que es preciso considerar el acoplamiento de impedancias de ambos. Las ecuaciones de este acoplamiento deben quedar igualmente reflejadas en el diagrama; ver el *Problema P2.8*.

El álgebra de diagramas de flujo es análoga a la de diagrama de bloques. Además, es interesante la regla de Mason, que permite obtener sistemáticamente la influencia de una variable sobre otra sin simplificaciones sucesivas, y en casos no cubiertos por el álgebra vista anteriormente. Ver por ejemplo **Dorf**.

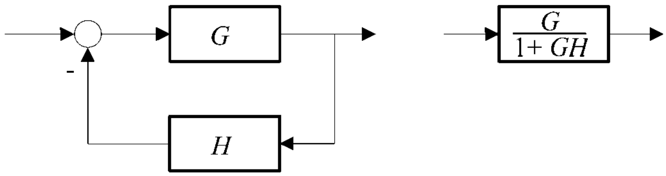
Serie, o cascada



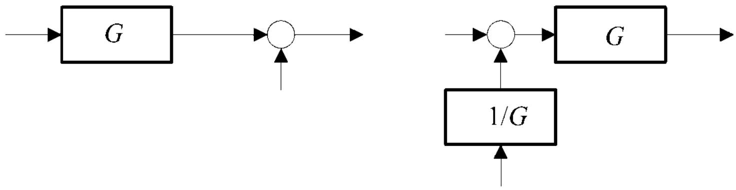
Paralelo



Realimentación



Traslación de punto de suma



Traslación de punto de distribución

FIGURA 2.5 Relaciones elementales del álgebra de diagrama de bloques

2.8 Formatos y unidades

Una función de transferencia racional se ha introducido previamente como cociente de polinomios en s. Sin embargo los polinomios, especialmente los de orden elevado, tienen la mala propiedad de ser muy sensibles a los valores de sus coeficientes: un pequeño cambio en un coeficiente puede producir grandes cambios en la respuesta temporal o la respuesta en frecuencia. Por ello se recomiendan las formas factorizadas que, además, son más cómodas de interpretar (polos y ceros próximos o distantes) y de manejar (obtención de residuos, multiplicar módulos y sumar fases en la respuesta en frecuencia). Hay dos formatos básicos: en polos y ceros, o en constantes de tiempo:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=k\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots}=K\,\frac{(1+T_{n+1}s)(1+T_{n+2}s)\ldots}{(1+T_1s)(1+T_2s)\ldots}$$

Obsérvese que K es la ganancia estática, pero no k. La segunda forma debe ser modificada si hay polos o ceros nulos (la ganancia estática ya no es K: es infinita, $F(s)$ inestable, o nula), o complejos (en pares conjugados). Véanse al comienzo de **4.2** las dos formas normalizadas para agrupar el par complejo: término independiente o término de mayor orden = 1.

Las unidades de $F(s)$ vienen determinadas por las de la salida $y(k)$ y la entrada $u(k)$. Son también las de K, si no hay polos ni ceros nulos.

La unidad de T es la unidad de tiempo adoptada: como hay sistemas rápidos y lentos, no siempre conviene medir el tiempo en segundos; pueden usarse ms, o min… Los valores de s, ceros y polos tienen la unidad de tiempo inversa. Análogamente, las pulsaciones ω vienen en rad/unidad de tiempo; en la práctica se habla también de frecuencias en Hz (o kHz, si la unidad de tiempo es el ms); no se olvide el factor 2 π. En este curso no se especificarán las unidades de tiempo, salvo en ejemplos o problemas muy concretos.

Al hablar de módulos y fases de números complejos, se supondrá por defecto que se trabaja en valores naturales A, con las unidades que correspondan a la función de transferencia, y radianes φ. Sin embargo, en muchos casos se manejan en la práctica los dB y los grados; esto se indicará siempre en el curso explícitamente:

A dB = 20 log A $\qquad$ $\varphi^{\circ}=\varphi\,\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$

PROBLEMAS

P2.1 Estudiar la necesidad de introducir la diferencia entre valor inicial y condición inicial, y la aplicación de la fórmula de la derivación.

a) Indicar el valor inicial y la condición inicial de $\cos(\omega t)$ y de $\cos(\omega t)u_0(t)$.
b) Indicar la transformada de Laplace de ambas funciones.
c) Obtener la derivada de ambas funciones.
d) Obtener la transformada de Laplace de la derivada de ambas funciones, a partir de c)
e) Obtener la transformada de Laplace de la derivada de ambas funciones, usando la propiedad de la derivada.

P2.2 Estudiar las respuestas de una típica compensación de adelanto de fase o retraso de fase: $F(s) = \dfrac{1+Ts}{1+fTs}$

a) Establecer las condiciones de estabilidad BIBO del sistema, en función de los valores de f y T.
b) Obtener las respuestas a un escalón para f, $T > 0$, en los casos $f < 1$ y $f > 1$, realizando un boceto de las mismas.
c) Comprobar, por distintos procedimientos, los valores final e inicial de la respuesta a un escalón, y la ganancia estática.
d) Obtener la respuesta temporal a una entrada $u(t) = \cos(\omega t)$, y condiciones iniciales nulas.
e) Comprobar que el régimen permanente de la anterior coincide con la respuesta en frecuencia, si el sistema es estable.

P2.3 En un sistema consistente en una autoinducción ideal (es decir, sin resistencia; supóngase una bobina superconductora) L, se considera como entrada la tensión aplicada, y como salida la intensidad resultante. Las conclusiones de este problema pueden resultar algo sorprendentes para alguien acostumbrado a manejar circuitos.

a) Obtener la respuesta temporal a una entrada $u(t) = \text{sen}(\omega t)$, para una intensidad inicial I_0.
b) Indicar el régimen permanente de la anterior respuesta, y si coincide con la respuesta en frecuencia. ¿Por qué?

P2.4 Se dan las siguientes respuestas impulsionales de tres sistemas distintos. Hacer un boceto de estas respuestas. Dar las funciones de transferencia de los sistemas. Obtener sus respuestas a un escalón. Indicar las ganancias estáticas de los sistemas estables.

a) $5e^{-5t}$

b) 10 sen($2t$)
c) 0,2e^{-10t} sen($5t$)

P2.5 Dada la función de transferencia: $F(s)=\dfrac{s^2+25}{s(1+2s)^2}$

a) Indicar si es estable BIBO.

Para las condiciones iniciales $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = -2$, $y''(0^-) = 0$:
b) Respuesta libre del sistema. Dar su régimen permanente.

Para la entrada $u(t) = 1 - \cos(5t)$ y condiciones iniciales nulas:
c) Respuesta forzada. Dar su régimen permanente. Dar los términos $y_u(t)$; $y_a(t)$ y discutir el resultado.

Respuesta en frecuencia:
d) Discutir qué sentido tiene aquí esta respuesta.
e) Obtener el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en función de ω
f) Particularizar lo anterior para ω = 0, 1, 5, 100.

P2.6 Señalar si cada uno de los siguientes sistemas es estable BIBO:

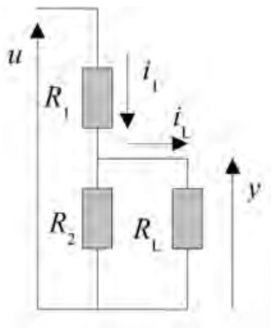
a) $\dfrac{1}{(s+2)(s+10)}$ b) $\dfrac{1}{(1+2s)(1+10s)}$ c) $\dfrac{1+2s}{s(1+5s)}$ d) $\dfrac{1-5s}{(1+2s)(1-2s)}$

e) $\dfrac{1-10s}{1+4s+4s^2}$ f) $\dfrac{1+4s}{s^2+25}$ g) $\dfrac{1}{s^2-2s+25}$ h) $\dfrac{1-2s}{s^2+2s+25}$

i) $\dfrac{(1-2s)(1+4s)}{(1+10s)(s+2-3j)(s+2+3j)}$ j) $\dfrac{(1-2s)}{(1+10s)(1-2s)}$

P2.7 Para el sistema consistente en un retardo $F(s) = e^{-0{,}2s}$
a) Dibujar la respuesta impulsional y la respuesta a un escalón.
b) Discutir si el sistema es estable.
c) Módulo y fase de la respuesta en frecuencia. Interpretar este resultado, relacionando tiempo y fase de la respuesta.

P2.8 Representar en diagrama de bloques un divisor de tensión en vacío y en carga. La entrada es la tensión aplicada u, la salida es la tensión medida y. También se representarán las variables intermedias i_1 e i_L. <u>Usar un solo bloque para cada resistencia, y una resistencia o su inversa (admitancia) para cada bloque.</u>



a) Para divisor en vacío (i_L = 0). Comprobar que, sorprendentemente, resulta un sistema realimentado. Eliminar, por álgebra de diagrama de bloques, la variable intermedia i_1 para obtener la relación y/u.
b) Para divisor con carga de corriente i_L conocida (no se conoce R_L). Aparece una nueva entrada independiente, i_L. Probar, reduciendo el diagrama, que $y = Gu - R_O i_L$, donde G es la división de tensión en vacío y R_O es la resistencia de salida del divisor.
c) Para divisor con carga resistiva R_L. Obtener el diagrama a partir del de b), añadiendo la relación conocida entre la tensión de salida y la corriente de carga. Obtener, reduciendo el diagrama, la relación y/u.

Obsérvese que las resistencias en serie o paralelo no se traducen en diagramas de bloques en serie o paralelo.

P2.9 Para el sistema descrito en el diagrama del apéndice **C**, para $B = 0$, y sin dar otros valores a los parámetros que los indicados en el diagrama:
a) Comprobar la función de transferencia reducida del motor dada en **C.2**, con salida ν_M y entrada u_M, para $m_L = 0$.

Primero para $K_D = 0$, y después para cualquier valor de K_D:
b) Obtener la función de transferencia del *lazo abierto*, con salida y^o y entrada e^o, para $m_L = 0$.
c) Obtener la función de transferencia del *lazo cerrado*, que describe la influencia de la referencia sobre la posición de salida, con salida y^o y entrada r^o, para $m_L = 0$.
d) Obtener la función de transferencia que describe la influencia de la perturbación de par de carga sobre la posición de salida, con salida y^o y entrada m_L N.m, para $r = 0$.
e) Obtener la función de transferencia que describe la influencia de la referencia sobre la variable de mando, con salida u V y entrada r^o, para $m_L = 0$.