

LA MATEMÁTICA, UN HACER INTRÍNSECO A LA ESPECIE HUMANA

JAVIER DE LORENZO
Universidad de Valladolid

Para Camino Cañón, a quien no ha sido ajena la Filosofía
sobre el Hacer matemático.

RESUMEN: El Hacer matemático se muestra como un artefacto clave para la especie humana y no extraño o ajeno sino como un vector director interno a la misma.

PALABRAS CLAVE: Hacer matemático, construcción, sistemas dinámicos.

1. Siguiendo a Poincaré he venido insistiendo en que no todo está dado en la *physis*, en la naturaleza. Naturaleza que se admite como no estática ni fijada de una vez por todas sino que se enfoca como un complejo de sistemas dinámicos interrelacionados en permanente devenir, en constante transformación.

Como parte de esa *physis*, y como un sistema dinámico más, la especie humana se ha ido transformando, y con especial amplitud, desde que se produjo la Revolución agrícola. Fue el momento en el que se dio el salto de fijar su residencia, su topos; el momento en el que se pasó a cultivar la tierra. Un salto que obligó a crear otros planos, entre ellos el del conocimiento, porque ese cultivo supone un conocimiento de la tierra, de sus plantas y de las transformaciones que sufren esas plantas porque hay que sembrar la semilla y esperar a que nazca el árbol, la planta, el fruto... La

semilla, transformada al cabo del tiempo en planta con su fruto que se tiene que recolectar, guardar, consumir, intercambiar... sabiendo que una planta pertenece a una especie y no a otra, determinado el producto final que hay que esperar, con confianza pero también con temor e inseguridad, a que nazca pasado un tiempo.

La siembra exige la construcción de cercados que delimiten el espacio sembrado y, de alguna manera, lo protejan, lo conviertan en paraíso. Pero también obliga a la construcción de utensilios para arar la tierra, para la recolección, lo mismo que obliga a la invención y construcción de vasijas para guardar lo cultivado... La construcción de viviendas, de asentamientos... conlleva el establecimiento de una organización social orientada hacia el futuro porque la siembra exige pensar en el futuro, planificar y esperar ese futuro, con las inseguridades que comporta que la siembra se pierda por la sequía, la tormenta o la rapiña de otras comunidades con las que hay que establecer guerras o intercambios...

Las construcciones se realizan, siempre, a partir de unos elementos previos. Elementos de la *physis* que han de ser transformados mediante una manipulación consciente para que cumplan su objetivo, porque no basta la semilla o el tronco o la rama de un árbol o amontonar unas piedras sin más: hay que sembrar en un período temporal determinado, o dar forma y orden a esas piedras y ponerlas en una estructura de cercado, de vivienda, de camino, de señal...; o dar forma a la rama o al tronco para convertirlos en viga, puerta, barca o lanza...; o tratar la piel y el pelo del animal para convertirlo en vestimenta, en abrigo o en enseña de guerra...

Toda construcción exige de elementos materiales —la piedra, la madera, la piel, la semilla...— pero también de estructuras formales, de elementos conceptuales que den forma adecuada a cada uno de esos elementos materiales. Artefactos ahora conceptuales que han de ir regulándose, organizándose y transformándose al igual que los elementos materiales. Allanar el suelo para que sea la base de una vivienda supone una transformación de ese suelo en plano; levantar paredes y poner techos obligan a la perpendicularidad y a la horizontalidad y, con ellas, al paralelismo... Una construcción, como todas las posteriores, que manifiesta un teorema básico como el de las tres perpendiculares que hay que construir, darle estructuración tanto material como conceptual.

El proceso constructivo transformador es siempre dinámico y llega un momento en el que el dato original al que hay que dar forma para con él construir ya no es el material puro —el tronco de madera, la piedra, la piel...—, sino un material previamente transformado, como hoy día se fabrican muebles a partir de conglomerados o vestidos a partir de productos sintéticos. Nuevos materiales transformados que conforman, ahora, lo que se ha convertido en natural, ya no artificial, para el ciudadano.

2. La Revolución neolítica no solo conformó el salto del nomadismo al sedentarismo, el paso a la agricultura. Supuso el origen de una serie de construcciones tanto materiales como conceptuales que han llevado a la especie humana a lo que es actualmente. Construcciones o transformaciones en lo social y en lo político, en la estructura familiar en las que también intervienen, al principio de modo implícito, estructuras como las geométricas y topológicas —dentro-fuera, la frontera, espacio conexo... junto a las de perpendicularidad, paralelismo...— y en otros casos aritméticas como el contar las vasijas, el ganado, los miembros del clan... Y mirar al cielo y observar la reiteración de las estaciones con los procesos agrícolas asociados o los fenómenos adversos y favorables pero también, en esa mirada, construir calendarios y establecer constelaciones en el cielo con su principio de correspondencia por el cual pasar a hablar del micro y el macrocosmos...

La siembra impone, además de una espera, un determinismo y una necesidad asociados: de la semilla de tomate solo sale tomate, del olivo únicamente se obtiene la aceituna y esos frutos determinados se hace necesario que salgan con los matices de tiempo, condiciones atmosféricas...

Desde lo material se da un salto a lo conceptual: esas semillas se terminan enfocando como los principios generadores de los que saldrá, necesariamente, tomate o aceituna y no calabaza, por ejemplo. Principios generadores que contienen, en sí, con necesidad intrínseca, el resultado final. Un resultado que ha sido predeterminado en el momento de la siembra aunque hay que trabajar, y a veces muy duramente, para obtenerlo. Un resultado que a veces causa sorpresa en su obtención por la belleza del mismo, por sus posibles aplicaciones «inesperadas» que pueden llegar a ser terapéuticas o venenosas y no solo ornamentales o de consumo. Del olivo se obtiene la aceituna; de ésta, el aceite; del aceite...

Todo este proceso supone, a la vez, una pugna, una lucha de esa especie con la *physis* de la que se es parte y por la que se intenta transformar a esa *physis* pero, a la vez, es esa especie la que se va transformando. Pugna por la cual todas las diferentes culturas agrícolas llegan a unos sistemas de numeración y sus reglas, a unas formas geométricas, a unas constelaciones... del mismo tipo. Elementos matemáticos que se incardinan en todas aquellas ramas que alcanzarán el calificativo de humanas precisamente por la conceptualización de esos elementos. Al igual que se llega a establecer, desde el habla, un lenguaje con su estructura que posteriormente se codificará en las reglas lingüísticas correspondientes.

En el proceso constructivo constante, permanente, se van originando elementos tanto materiales como conceptuales que componen una base cultural en la cual se establecen reglas, con su manejo y dominio, su desarrollo. Construcciones y haceres práctico-conceptuales que llevan a la aparición de diversos oficios con sus papeles sociales correspondientes. Oficios

apoyados en la elaboración y dominio de artefactos tanto materiales como conceptuales con los que se pretende manipular la physis.

Uno de esos oficios, que se irá plasmando como tal muy lentamente aunque se hará imprescindible, se centra en mantener las reglas de los diferentes oficios que, en principio, se transmiten de padres a hijos para luego organizarse en gremios. Esto último supone que las reglas sean codificadas para ser enseñadas. Codificación que en algunos casos conduce a componer elementos que organicen y estructuren, básicamente, el contenido de esos oficios y, en algunos casos, de sus métodos. El oficio de la enseñanza se irá constituyendo como uno de los básicos de la civilización occidental, hasta el extremo de que la enseñanza se considera una de las profesiones que estructuran la sociedad occidental.

3. En ese proceso, largo proceso, la especie humana, alguna de sus ramas, ha ido elaborando un hacer muy especial, el matemático. Un hacer que se incardina en esa especie desde siempre, se liga a la misma en su desarrollo y vicisitudes de modo implícito desde los primeros momentos. Acabo de indicar que esa especie tiene que construir y pasar de la edilia a la arquitectura y, de esta, al urbanismo y, para ello, tiene que medir, dibujar, elaborar formas geométricas que posteriormente alcancen su materialización concreta en la casa, en la polis con sus diferentes edificios y localizaciones; forma previa a su materialización, a su realización concreta. No sólo geometría, también tiene que numerar y contar y todo ello como base hasta para la propia organización social.

Ese contar y ese medir, esa elaboración de formas geométricas, por retroacción, va permitiendo un desarrollo propio, intrínseco del Hacer matemático que luego volverá a mostrarse clave para su aplicación en otras circunstancias. Un desarrollo que se va realizando y plasmando en una serie de experiencias propias de cada Ámbito en que se escinde el comportamiento humano: Ámbitos lúdico, simbólico, tecnológico, conceptual. En este proceso intrínseco, específico, se logrará un avance conceptual ligado al material constructivo de artefactos. Ello exige establecer reglas que delimitan tanto el campo de juego como el modo en el que hay que jugar. Campo de juego conceptual, racional, pero también lúdico, simbólico, computacional que componen, todos ellos, el Hacer matemático en sí.

Y al igual que en el habla se construyen poemas, diálogos, novelas... en los campos de juego matemáticos se construyen proposiciones, teoremas, disciplinas enteras de estudio... Hay que ir elaborando reglas que delimitan diferentes campos de juego y los juegos mismos, reglas que hay que conservar y transmitir y, para ello, hay que enseñar para que se mantengan y amplíen los conocimientos que comportan.

En el plano conceptual que se ha ido elaborando a lo largo del tiempo, al Hacer matemático —y como en el caso de la agricultura— se le va a enfocar como dotado de unos principios generadores intrínsecos, propios del mismo. Principios generadores como el de inducción completa que se apoyan en un elemento fisiológico como el andar: un paso y otro paso, sin limitación alguna. O unos movimientos de traslación del cuerpo que son la materialización de una estructura formal como la de grupo. Principios que no son arbitrarios aunque parezcan convencionales sino que reflejan una relación muy profunda incluso con la fisiología humana. No hay arbitrariedad alguna en el andar que, en lo conceptual, se refleja en el proceso de la inducción, en el uno más uno más uno...; como no la hay en principios geométricos como los de perpendicularidad y paralelismo: una casa se viene abajo si no se respetan esos principios...; ni en los movimientos del niño cuando comienza a andar y que, de no realizarlos, quedaría indefenso para el futuro...

Desde la acción, desde la práctica, y ya en un plano diferente como es el conceptual y no el estrictamente fisiológico ni el lúdico, se delimitan alguno de esos principios generadores y a partir de ellos se construyen las proposiciones que lingüísticamente reflejan el contenido conceptual correspondiente. Si en la siembra se exigían unos medios para llegar a obtener el resultado final, ese medio ya no es el material: ahora es un nuevo medio que se ha logrado gracias a una de las grandes conquistas de la especie humana: la razón. Es la razón la que ahora permite la obtención del resultado final que se pretende estar contenido en los principios generadores, y lo hace mediante el encadenamiento racional de unas proposiciones con otras. Un resultado final que se muestra necesario, consecuencia obligada si se dan los medios adecuados; en otras palabras, si la razón se maneja adecuadamente.

La consideración de que este Hacer, este oficio, es un instrumento esencial como creador de artefactos culturales para obtener conocimiento y, con él, la posible transformación de la *physis*, y que ha ido elaborando la especie humana, se refleja en todas las tradiciones: el demiurgo construyó el cosmos a partir del caos como arquitecto supremo mediante peso, número, medida. Lema repetido en todas sus variantes hasta la saciedad en nuestra cultura occidental cuando en ella se creó la Ciencia. Es la clara asunción de que la Matemática es un hacer incardinado en esa especie como puede serlo el habla convertida en lenguaje, después en escritura. Dos casos ejemplares de lo que estimar vectores directores del desarrollo cultural humano.

Leer, escribir, contar, captar el espacio matemáticamente, computar, cinco claves constitutivas de lo que llamar ciudadano en la sociedad occidental actual.

4. Son motivos que me llevan a la clásica elección del término *construcción* para el Hacer matemático frente a los de creación y descubrimiento. En castellano *creación* se liga más bien a un proceso demiúrgico en el que, de la nada, se obtiene algo. *Descubrimiento* se liga a la obtención de un conocimiento de algo que está ahí, en este caso en un mundo eidético al que no se sabe muy bien cómo llegar y que está esperando la llegada del descubridor como el continente americano esperó, para ser América, la llegada de Colón, en un proceso que sólo tiene en cuenta los trabajos que preparan el descubrimiento y no las manipulaciones que se requieren para la obtención de lo que no estaba dado en la *physis* como no estaba dada la ciudad, ni Internet, ni los productos sintéticos, ni las autopistas, ni los microscopios, ni los telescopios... como tampoco estaban dados los elementos conceptuales correspondientes.

Un término, el de construcción, muy manejado como metáfora por matemáticos al estilo Hilbert o Bourbaki. Aunque los pensadores de tendencia ingenieril lo prefieren evitar manejando más bien el de *invención*. Es el que utiliza en muchas ocasiones Poincaré —excepcional matemático visionario pero también politécnico ingeniero de minas— y con el que da título a uno de sus ensayos más citados, «La invención matemática», que incluirá en *Ciencia y Método*. Aquí se puede leer:

Inventar consiste precisamente en no *construir* combinaciones inútiles, sino en *construir* solo las que pueden ser útiles, que no son más que una ínfima minoría. Inventar es discernir, es elegir. (*Ciencia y Método*, p. 42. Soy yo quien da el énfasis al término *construir*).

Debo reconocer que la elección de términos tiene siempre, y en sí, algo no solo de convencional sino de arbitrario. Y la elección adoptada no impide que califique de creador a quienes, como Gauss, Poincaré, Grothendieck..., construyen nuevas teorías, nuevos campos en el Hacer matemático y que utilice el término como sinónimo, en muchas ocasiones, del de construcción, pero siempre en gracia al estilo expresivo, sabiendo que nunca es creación de la nada...

5. La conceptualización de ese Hacer se comenzó a plasmar en el mundo griego, un mundo que consigue recoger la herencia de Egipto, entre otras civilizaciones antiguas. En *Menón*, Platón pone de manifiesto el poder de la razón y la necesidad que origina en el proceso argumentativo: «razonemos como los geómetras»... Si postulamos la proposición A y obtenemos, por un proceso argumentativo correcto, la proposición B, hay que aceptar B necesariamente siempre que se acepte A. Necesidad derivativa, argumentativa que no implica la verdad de lo postulado y, por ello, de lo obtenido

en la derivación. La verdad, sea lo que sea lo que designe este término, se obtendrá por otros medios porque lo que importa es resaltar el papel de la razón como uno de los instrumentos esenciales de la especie humana y la necesidad que su manejo entraña.

Papel de la razón que puede implicar «sorpresas», llevar a resultados inesperados como también se tenía, como antes he apuntado, en las consecuencias de algunos frutos obtenidos a partir de la siembra, por ejemplo, atendiendo a sus «poderes» curativos o venenosos. En este caso, admitidos como números «naturales» los pares y los impares —que son los artefactos adecuados para el contar—, admitidos como números los racionales —que son los adecuados para medir magnitudes—, la razón demuestra por un proceso de reducción al absurdo que la diagonal de un cuadrado no es medible respecto a su lado, demuestra que es inconmensurable respecto al lado. Mediante la razón se demuestra que $\sqrt{2}$ no es número porque no es ni par, ni impar, ni racional. Pero también que una magnitud como la diagonal del cuadrado, que está ahí, ante nuestros ojos, es inconmensurable respecto al lado que puede tomarse como unidad de medida.

Un hecho «sorprendente» frente al *dictum* de que el demiurgo hizo todo a partir del número y la medida pero que hay que aceptar porque lo impone la razón del geómetra, del matemático; lo impone la razón argumentativa con su necesidad absoluta. Imposición con necesidad frente, incluso, a lo perceptivo.

Es la razón la que provoca la existencia de nuevas entidades no previstas con anterioridad. Nuevas entidades no descubiertas sino construidas por esa razón y que llevan a una ampliación necesaria de lo numérico que exige la construcción de un nuevo campo numérico manteniendo las reglas previamente conocidas. Se construyen nuevos números, los irracionales, que de alguna manera permiten la medida de magnitudes como lo refleja el problema de duplicar el área de un cuadrado.

Existencia de números irracionales que van más allá de $\sqrt{2}$ como demuestra Teeteto, demostración con la que se reafirma, a pesar de que aparentemente Platón se pare en $\sqrt{17}$ en el diálogo correspondiente, la ilimitación de los números y, con ella, la ilimitación del contar y del medir. Ilimitación demostrada, por otro lado, por la razón y con el mismo mecanismo de reducción al absurdo para los números «naturales» y, con el mismo método, para los números primos. Pero existencia, también, de magnitudes que aparentemente son inconmensurables porque lo son para ciertos números pero no para los ahora construidos.

6. Un Hacer proteico, el matemático, con muchas caras. Una de ellas nos muestra que en ese Hacer se obtienen proposiciones que pueden, de alguna manera, materializarse posteriormente en la *physis* como ocurre con

la arquitectura apoyada en la geometría: se realizan los planos previos de un teatro, de un anfiteatro, de una polis para luego materializarlos sobre el terreno. Estudio previo realizado conceptualmente a través de la figura, la medida, el cálculo y que los diferentes artesanos tendrán que llevar a la práctica material. Construido el edificio, construida la polis, el ciudadano pasa a percibir no ya la naturaleza «virgen» sino una physis transformada gracias a la materialización de ese peso, número, medida. La percepción se va transformando como se va transformando el medio en el que vive y se desarrolla el perceptor.

Y aquí se incardina otro elemento que muestra la potencia del Hacer matemático a través de la razón conceptual: hacer ver lo que no se ve, ir más allá de lo simplemente perceptivo y obligar a percibir cualidades que, en sí, son imperceptibles. Ha sido una de las claves de lo que se ha denominado «matematización de lo real». Un proceso que alcanzará su apogeo con la elaboración de la ciencia tal como hoy la entendemos con la aceptación de las cualidades primarias —aquellas que no se perciben como la masa, aceleración...— frente a las cualidades secundarias —que son las que se perciben— como el olor, el sabor, el color...

Captación de cualidades en la que también intervendrá el Hacer matemático desde otra de sus caras, la del cómputo de datos. Un cómputo que conduce a la búsqueda de ayudas como las máquinas de calcular que se plasmará en la pascaliana y las mejoras introducidas por Leibniz: hay que ayudar al cálculo y al establecimiento de los cómputos de los impuestos de los estados emergentes... Una vez más, el hacer matemático enlazado con una rama de la especie humana, como lo va a mostrar, inmediato, con la creación del Cálculo diferencial e integral, con el surgir de la ciencia...

Hay otras caras en el Hacer matemático: no sólo se obtienen proposiciones, teorías más o menos desarrolladas con sus aplicaciones a la physis con sus enlaces entre sí y sus cambios y transformaciones o sus cómputos con la construcción de algoritmos que posteriormente se ligarán a los computadores para hacer posibles mecanismos como los de modelización. El Hacer matemático ha supuesto la creación y desarrollo de la razón conceptual. Es el Hacer en el que se han ido desarrollando mecanismos demostrativos en paralelo —en un momento como el de la democracia ateniense— a las argumentaciones políticas y que muestran una misma finalidad: convencer a los demás de lo apropiado de las consecuencias de unas previas proposiciones postuladas.

Mecanismos argumentativos que se terminan codificando en una disciplina que se denominará Lógica pero que surgen del tipo de razonamiento manejado por los geómetras y por los dialécticos. Mecanismos demostrativos que no se han dado de una vez y para siempre sino que han ido evolucionando y han ido surgiendo otros nuevos como la inducción completa

que aparece por vez primera como tal artefacto demostrativo con Pascal, ya en el siglo xvii. Y junto a esos procesos demostrativos y argumentativos, también el Hacer matemático hace surgir nuevos mecanismos de conceptualización como los de definición implícita y la definición por abstracción que surgen con el Hacer Global, ya a finales del siglo xix.

7. Caras de un mismo Hacer y que suponen enfocarlo —si solo nos detenemos en dos de esas caras— como producción, como hacer o práctica, y a la vez como producto, como resultado de ese hacer, de esa práctica. Dos caras que, en su papel en la sociedad occidental, en su desarrollo, exige que el matemático posea un dominio de la misma.

Así, en una geometría como la métrico-euclídea se muestra esencial el trazado de figuras sobre el arenario, sobre la pizarra o el papel en un proceso figurativo que conduce a «ver» la construcción que se va realizando y que posteriormente se codificará en ideograma mezcla de lenguaje ordinario y de signo específico. Un ver que basta para alguna escuela matemática como la hindú como refleja la exigencia de un «¡Mira!» ante la figura de un teorema como el de Pitágoras. Y ello a pesar de que esa geometría euclídea es lo más anti-intuitiva posible: no hay forma de «ver» el paralelismo, por ejemplo, pero ello no es obstáculo para que en un trozo de plano como el arenario puedan realizarse las construcciones geométricas pertinentes.

Construcciones que también pueden realizarse en el plano geométrico complejo a pesar de manejar la cónica del absoluto y que han de ser enfocadas como auténticos esquemas constructivos que permiten una línea heurística fundamental. O en la Geometría descriptiva en el espacio con sus proyecciones y abatimientos correspondientes posteriores...

No sólo en Geometría en cualquiera de sus ramas. La Aritmética exige para sus procesos del contar o del argumentar, del signo escrito, de la cifra pero también del ideograma propio, intrínseco. Es la pugna entre el cálculo de Pitágoras y la escritura de Boecio en la época medieval occidental. Y es el triunfo de la notación simbólica de Vieta y Descartes.

El ideograma, convertido a veces en mero esquema geométrico gráfico, es clave para «ver» razonamientos como los que se tienen en Álgebra homológica o en Álgebra geométrica a pesar de que, en estas disciplinas, se quiera que la figura geométrica no exista reemplazada por la fórmula algebraica que es el auténtico ideograma que sirve de apoyatura para la construcción matemática.

8. Caras que en ningún caso pueden hacer olvidar que la Matemática exige que el matemático posea un dominio de la misma en sus diferentes disciplinas y ramas en las que se encuentra escindida en el momento en

el que se pone a trabajar ese matemático. Pero también se le exige al matemático inventor —no tanto al divulgador o a quien, como profesor, vive de la Matemática— una capacidad imaginativa extraordinaria, lo que se ha venido denominando intuición. Capacidad para captar, por un lado, el alma de la demostración de una proposición que culmina en teorema y, por otro, capacidad para ampliar el conocimiento, el producto matemático. Es una intuición que se apoya, en muchas ocasiones, en el ideograma como acabo de exponer pero también en la captación de analogías «insospechadas» entre campos del conocer matemático que aparentemente se encuentran muy alejados entre sí.

Intuición que no se da sin más sino que exige un trabajo, a veces muy duro, como afirmaba Gromov en 2009 poco antes de recibir el Premio Abel: «Trabaja y trabaja, y piensa y piensa. No hay otra receta para esto». Un duro trabajo, único que permite que el matemático alcance unas mínimas experiencias de la razón. Experiencias de la razón obtenidas mediante ese trabajo y el trato constante con el Hacer matemático, con los problemas, conjeturas, teorías, métodos... que encuentra en el medio social en el que ese matemático se halla en su momento histórico, experiencias que son las únicas que permiten alcanzar la visión de las analogías, de los posibles enlaces entre diferentes campos matemáticos mediante lo que algunos han calificado como *iluminación*.

Es lo que nos contará Poincaré en el ensayo que antes he citado, pero es el mismo proceso de los cuaterniones de Hamilton, de los trabajos de Zariski, o lo expresado por Atiyah, por Serre, por Grothendieck... por todos los matemáticos que han conseguido construir ramas enteras de la Matemática. Y me remito, aquí, a mi ensayo *Creativity and Mathematical Inspiration* de 2011.

9. La Matemática, un Hacer constructivo de artefactos culturales —con sus experiencias lúdicas, simbólicas, computacionales— que se encuentra incardinado en la especie humana como también lo está, por otro caso paradigmático, el habla. Habla que a través de la escritura se convertirá en uno de los vectores directores de la cultura humana como también lo será el Hacer matemático.

Un Hacer matemático, un artefacto cultural además de lúdico, simbólico y computacional, con el que la especie humana, más bien una parte de la misma, consigue captar algo de la *physis* y con esa captación da la posibilidad de transformarla y, consecuente, transformarse como especie, como uno más de los sistemas dinámicos que, de momento, componen esa *physis*.